

II Esonero di CP110 a.a. 2014-15 ^a

Nome : _____

Matricola : _____

Esercizio 1. L'intervallo $[0, 1]$ viene diviso a caso in due intervalli. Siano X_{\max} e X_{\min} le lunghezze dell'intervallo più lungo e più corto rispettivamente.

- (1) Calcolare la probabilità che $X_{\max}/X_{\min} \geq 2$. [3 punti]
- (2) Calcolare la media di X_{\max}/X_{\min} . [3 punti]

Esercizio 2.

- (1) Enunciare e dimostrare la legge debole dei grandi numeri [3 punti].
- (2) Date due variabili casuali discrete X, Y con distribuzione congiunta $p(x, y)$, spiegare che cosa si intende con $\mathbb{E}(X | Y)$ e dimostrare la formula $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | Y))$ [3 punti].

Esercizio 3. Usando la funzione generatrice, dimostrare che la differenza di due variabili casuali $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ indipendenti è ancora una variabile Gaussiana. [4 punti]

Esercizio 4.

- (1) Calcolare approssimativamente la probabilità di ottenere 55 teste in 100 lanci di una moneta equa. [3 punti]
- (2) Sia $X \sim \text{Exp}(1)$ e sia $Y = \log X$. Calcolare la densità di probabilità di Y . [3 punti]

Esercizio 5. Sia $A = (X, Y)$ un punto a caso del disco unitario con centro nell'origine.

- (1) Calcolare la marginale dell'ascissa X . [3 punti]
- (2) Calcolare la probabilità che il punto A sia a distanza maggiore di $1/2$ dall'origine. [2 punti]

Esercizio 6. Sia $Y \sim U(0, 1)$ e sia X una variabile casuale tale che, condizionatamente a $Y = p$, $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Dimostrare che X assume con uguali probabilità i valori $0, 1, \dots, n$. [4 punti]
NB. usare che

$$\int_0^1 dx x^k (1-x)^{n-k} = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}.$$

- (2) Calcolare $\mathbb{E}(YX)$. [3 punti]

^aNota 1: discutere tutti i passaggi altrimenti non potranno essere assegnati i punti. Nota 2: non usare libri o appunti